

Mitică Dudău Teodor Ștefănică Marin Oanea
Florentina Dudău Rodica Ștefănică Doina Oanea

Aproape totul despre metoda figurativă

MATEMATICĂ

pentru învățământul primar

CUPRINS

Partea I

Despre metoda figurativă

Introducere	6
1. Sumă și diferență.....	9
2. Sumă și cât.....	13
3. Diferență și cât.....	16
4. Împărțirea cu rest.....	19
5. Probleme cu numere consecutive	22
6. Probleme de transfer.....	25
7. Evoluția în timp a unor mărimi.....	29
8. Exerciții sau probleme?	33
9. Egalități date sau obținute.....	36
10. Alte reprezentări decât prin segmente.....	40
11. Metoda figurativă și fracțiile.....	45
12. Mersul invers și metoda figurativă	48
13. Metoda figurativă și geometria.....	53

Partea a II-a

1. Probleme care se rezolvă prin metoda figurativă.....	57
2. Desene care... vorbesc	98

Indicații și răspunsuri	103
--------------------------------------	------------

Bibliografie.....	110
--------------------------	------------

8. Neacșu, J. și colectiv – *Metodica predării matematicii la clasele I-IV*, E.D.P., București, 1986

9. Părâială, D., Părâială, V. – *Teste de aritmetică pentru pregătirea de performanță la clasa a IV-a*, Editura Polirom, Iași, 1998

10. Petrică, L., Ștefănescu, V. – *Matematică. Probleme pentru clasele I-IV*, Editura Polirom, Iași, 1996

INTRODUCERE

Conținutul unor probleme pare foarte încurcat. Rezolvitorul citește de mai multe ori problema, încercând să și-o apropie, să renunțe temporar la unele informații, punând accent pe altele și revenind apoi la cele la care a renunțat, spre a face textul mai accesibil, mai ușor de înțeles. E ca și cum ai încerca să explici ceva cuiva care n-a priceput de prima dată și-ți tot adaptezi stilul de expunere până când, în sfârșit, se întrevede că ar înțelege și el câte puțin (numai că, în cazul nostru, cel care ar înțelege mai greu ar putea fi rezolvitorul însuși!).

Înțelegerea relațiilor dintre mărimile unor probleme, între valorile cunoscute și/ sau valorile necunoscute ale acestora este un proces care se desfășoară în mai multe etape, de la o etapă la alta rezolvitorul simțind că zona cercetată (problema!) devine din ce în ce mai luminată după ce, inițial, i se părea că este în beznă. Unele dintre aceste etape presupun diverse tipuri de reformulare a problemei până se găsește forma care să asigure înțelegerea clară a conținutului ei, astfel încât, el, rezolvitorul, să știe cu precizie ce operații efectuează pentru a afla necunoscutele problemei (cele cerute explicit de text sau cele formulate ca cerințe intermediare de rezolvitor).

În multe situații, o reformulare schematică eficientă se realizează prin **metoda figurativă (grafică)**, o metodă foarte des utilizată în clasele II-IV. Ea constă în reprezentarea mărimilor necunoscute prin diferite simboluri, evidențiind în această reprezentare și posibilele relații dintre mărimile problemei. Utilizând pentru reprezentarea mărimilor, segmente de dreaptă sau alte figuri geometrice, precum și scheme ale obiectelor despre care se vorbește în probleme, metoda ușurează trecerea de la abstract la concret și invers, netezind calea spre utilizarea metodelor algebrice în rezolvarea problemelor.

În aplicarea metodei se ia o mărime drept reper (de regulă cea mai mică) celelalte mărimi fiind reprezentate în funcție de acesta.

Metoda permite, uneori chiar necesită, formularea de ipoteze referitoare la evoluția unei situații reprezentate inițial sau la posibilele consecințe ale unor modificări efectuate de rezolvitor precum unele transferuri sau folosirea unor expresii ca „*îi mai dau eu celui mai mic*“, „*îi mai iau eu celui mai mare*“.

Dacă problema se referă la dinamica – evoluția în timp – a unor mărimi, trebuie identificate cu grijă momentele și ales cel care trebuie reprezentat, sau, în cazul reprezentării tuturor, cel care conține reperul.

Cum ajungem la concluzia că trebuie să folosim metoda figurativă? Rareori când citim o problemă putem formula o judecată sau un răspuns imediat la cerința acesteia. De aceea, fără a încerca să algoritmizăm abordarea rezolvării unei probleme, recomandăm rezolvitorului, așa cum am mai făcut-o și altădată, să parcurgă următoarele etape:

a) Cunoașterea și înțelegerea enunțului problemei

Elevul trebuie să aibă în vedere:

- lectura atentă a textului;
- clarificarea elementelor de vocabular;
- scrierea schematică (se includ în schemă numai informații esențiale – de regulă cantitative – și care permit reconstituirea textului după schemă);
- evidențierea informațiilor esențiale, a detaliilor, a legăturilor între date.

G. Polya recomandă să se pornească totdeauna de la enunț, afirmând: „Mergi înainte abia când acest enunț îți este atât de clar și de bine imprimat în minte încât poți să nu te mai uiți la problemă pentru o clipă, fără teamă că ai să pierzi din vedere ansamblul.“¹

b) Analiza și întocmirea unui plan

Cercetând legăturile dintre valorile cunoscute și cele necunoscute ale mărimilor problemei, se descoperă idei privind aflarea necunoscutelor sau aflarea unor date intermediare ce pot duce la aflarea acestora. Acest proces poate duce la punerea în evidență a ideilor ce contribuie la rezolvarea problemei. În acest caz, stabilirea unei succesiuni convenabile poate ușura obținerea soluției. Se ajunge, astfel, la întocmirea unui *plan de rezolvare* a problemei.

Uneori este important să găsim o idee de „urnire“ a problemei, etapele planului de rezolvare revelându-se o dată cu rezolvarea propriu-zisă.

c) Realizarea planului

Coincide cu rezolvarea propriu-zisă a problemei, prin alegerea și efectuarea operațiilor corespunzătoare.

¹ G. Polya – „Cum rezolvăm o problemă“, Ed. Științifică, București, 1965

Stabilirea operațiilor se prefigurează în etapele anterioare, când lectura textului, identificarea relațiilor dintre date, întocmirea planului de rezolvare conduc implicit spre calculele ce trebuie efectuate.

d) Privirea retrospectivă

Este o etapă de multe ori ignorată, dar fără de care rezolvarea unei probleme nu trebuie considerată încheiată. Neabordarea acestei etape diminuează până la anulare efectul în plan intelectual și progresul în capacitatea de rezolvare în viitor a altor probleme. În această etapă se poate reconstitui cu claritate planul optim de rezolvare a problemei (inclusiv prin renunțarea la unele etape și restructurarea altora), se evidențiază legături cu alte probleme și se fixează idei ce pot fi folosite în rezolvarea acestora, se fac generalizări sau particularizări, se pot compune alte probleme.

În ce privește lucrarea noastră credem că mai sunt necesare câteva observații.

Uneori am apelat la formalizarea problemei folosind pentru diverse mărimi litere: a, b, c, \dots În cadrul acestor formalizări am optat pentru scrierea cu ajutorul înmulțirii a unor relații exprimate în text prin cuvinte ce sugerează împărțirea: „ b este de trei ori mai mic decât a ” se scrie $a = 3 \times b$; „câtul împărțirii lui a la b este 2 și restul 3” se scrie $a = 2 \times b + 3$. La fel, experiența ne îndeamnă să folosim operația de adunare atunci când textul ne sugerează să folosim scăderea: „ b este cu 3 mai mic decât a ” se scrie $a = b + 3$.

Tot din experiență recomandăm rezolvitorilor ca inegalitățile sugerate de textele unor probleme să fie scrise cu ajutorul egalităților: „ a mai mare ca b cu 20” se scrie $a = b + 20$; „ a mai mare de 2 ori ca b ” se scrie $a = 2 \times b$.

Respectând aceste recomandări vom ajunge, în cazul în care am decis să folosim metoda grafică, să reprezentăm cu ușurință figura corespunzătoare problemei.

Paragrafele care urmează reprezintă o încercare de grupare a problemelor care pot fi rezolvate prin metoda figurativă în categorii pe care noi le-am identificat în activitatea practică. Rezolvitorii pot avea și alte păreri.

1. SUMĂ ȘI DIFERENȚĂ

În cazul acestei categorii de probleme, reprezentăm prin segmente cele două numere, punând în evidență faptul că unul dintre ele este mai mare decât celălalt cu diferența dintre ele.

Dacă luăm ca reper numărul mai mic, atunci obținem dublul acestui număr scăzând din sumă diferența celor două numere. Dacă luăm ca reper numărul mai mare, atunci obținem dublul acestui număr adunând la sumă diferența celor două numere.

Problemă rezolvată

☑ Suma a două numere „ a ” și „ b ” este 18. Să se afle cele două numere știind că unul este mai mare cu 4 decât celălalt.

Rezolvare

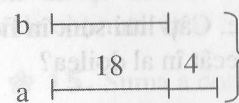
$$a + b = 18$$

$$a - b = 4$$

$$a = ? \quad b = ?$$

Egalarea celor două numere se face:

a) prin scădere (e mai utilizată)



$$18 - 4 = 14 \quad (2 \times b \text{ sau } 2b)$$

$$14 : 2 = 7 \quad (b)$$

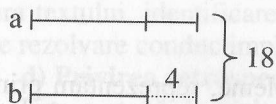
$$7 + 4 = 11 \quad (a)$$

Verificare: $11 + 7 = 18$

Dacă din numărul mare „ a ” scădem 4, atunci „ a ” va fi egal cu „ b ”. Scăzând pe 4 din sumă (18), atunci obținem două numere egale cu „ b ”.

Respect pentru oamenii și cărți

b) prin adunare:



$$18 + 4 = 22 \text{ (2a)}$$

$$22 : 2 = 11 \text{ (a)}$$

$$11 - 4 = 7 \text{ (b)}$$

Verificare: $11 + 7 = 18$

Dacă numărului mai mic „b” îi adunăm 4 (diferența), atunci va fi egal cu numărul mai mare „a”. Diferența aceasta va fi adunată și la sumă și atunci obținem 22 ($2 \times a$ sau $2a$).

☞ Probleme propuse

☼ 1. Suma a două numere este 25, iar diferența lor este 5. Aflați cele două numere.

☼ 2. Suma a două numere este 54, iar unul dintre ele este cu 18 mai mare decât celălalt. Care sunt cele două numere?

☼ 3. Două compuneri au în total 49 de rânduri. Una e mai scurtă cu 17 rânduri decât cealaltă. Câte rânduri are fiecare compunere?

☼ 4. În două bidoane se află 58 l lapte. Câți litri sunt în fiecare bidon dacă în primul sunt cu 14 l mai mult decât în al doilea?

☼ 5. Doi frați au împreună 26 de ani. Unul dintre ei are cu 4 ani mai mult decât celălalt. Câți ani are fiecare?

☼ 6. Bogdan are 100 de timbre românești și străine. Câte timbre are din fiecare fel, știind că timbre românești are cu 24 mai multe decât străine?

☼ 7. Două cărți au împreună 244 de pagini. Una din ele are cu 38 de pagini mai puțin decât cealaltă. Câte pagini are fiecare carte?

☼ 8. Pe două rafturi ale unei biblioteci sunt 75 de cărți. Să se afle câte cărți se află pe fiecare raft, știind că pe al doilea sunt cu 17 mai puține decât pe primul.

☼ 9. Suma a trei numere este 50. Să se afle fiecare număr, știind că al doilea este mai mic cu 4 decât primul și cu 7 decât al treilea.

☼ 10. Suma a trei numere este 682. Al treilea număr este mai mare decât al doilea cu 115, iar decât primul este mai mic cu 170. Să se afle numerele.

☼ 11. Pe 3 caiete s-au scris în total 101 pagini. Pe primul caiet s-a scris cu 8 pagini mai puțin decât pe al doilea, iar pe al treilea cu 13 mai mult decât pe al doilea. Câte pagini s-au scris pe fiecare caiet?

☼ 12. Mărind cu 12 suma a două numere obținem 216. Să se afle numerele știind că primul este cu 28 mai mare decât al doilea.

☼ 13. Dacă dintr-un număr scădem 15, iar din altul scădem 83, diferența numerelor obținute este 10. Să se afle diferența dintre numerele inițiale.

☼ 14. Suma a două numere este 226. Dacă din primul număr scădem 22 și din al doilea scădem 52, atunci diferența dintre numerele obținute va fi 12. Să se afle numerele.

☼ 15. Suma a două numere este 208. Dacă pe primul îl mărim de 2 ori, iar pe al doilea de 3 ori, suma numerelor obținute va fi egală cu 512. Să se afle numerele.

☼ 16. Diferența dintre două numere este 9. Mărind de 3 ori cele două numere, suma numerelor obținute este 363. Să se afle numerele inițiale.

☼ 17. Mărind de 3 ori două numere obținem pentru noile numere suma 333, iar diferența 51. Care sunt numerele?

* 18. Suma a două numere este 121. Dacă îl micșorăm pe primul de 3 trei ori și pe al doilea cu 3, suma numerelor obținute este egală cu 54. Aflați numerele inițiale.

* 19. Semisuma a două numere este 49. Să se afle numerele știind că primul este mai mare cu 18 decât al doilea.

* 20. Semisuma a două numere este 70, iar semidiferența este 16. Să se afle numerele.

* 21. Dublul sumei a două numere este 264. Aflați numerele știind că primul este cu 28 mai mic decât al doilea.

* 22. Triplul sumei a trei numere este 282. Să se afle numerele, știind că primul este cu 26 mai mic decât al doilea și mai mare decât al treilea cu 28.

* 23. Mărind de 6 ori suma a două numere obținem 438. Să se afle numerele știind că diferența dintre ele este 21.

* 24. Suma a trei numere este 52. Primul număr este 10, iar diferența dintre al treilea și al doilea este 12. Aflați celelalte două numere.

* 25. Un elev a citit în trei zile 43 de pagini dintr-o carte. În prima zi a citit cu 3 pagini mai puțin decât a treia zi, iar a doua zi a citit 16 pagini. Câte pagini a citit în fiecare zi?

* 26. Un elev a citit în trei zile 46 de pagini. În prima și în a doua zi a citit un număr egal de pagini, iar a treia zi cu 18 pagini mai puțin decât în cele două zile la un loc. Câte pagini a citit în fiecare zi?

* 27. Trei elevi au rezolvat într-o săptămână 95 de probleme. Primul și al doilea au rezolvat un număr egal de probleme, iar al treilea cu 7 probleme mai mult decât ceilalți doi împreună. Câte probleme a rezolvat fiecare?

2. SUMĂ ȘI CÂT

Caracteristica esențială a acestor probleme constă în faptul că se precizează (sau se poate deduce) de câte ori este mai mare un număr „a” decât alt număr „b” și care este suma lor.

Reprezentarea prin segmente ne va sugera că „a” este mai mare decât „b” de „n” ori și că suma lor este $(n + 1)b$. Vom obține astfel pe „b” prin împărțirea sumei la „n + 1” și pe „a” prin înmulțirea lui „b” cu „n”.

Problemă rezolvată

☑ Suma a două numere este 28. Să se afle numerele, știind că unul este de trei ori mai mare/ mic decât celălalt.

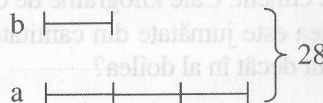
Rezolvare

$$a + b = 28$$

$$a = 3b \text{ sau } b = a : 3$$

$$a = ? \quad b = ?$$

Din scrierea prescurtată se observă că numărul mai mic este „b”. Îl vom figura primul. Pe al doilea îl vom desena de 3 ori mai mare.



Conform figurii, 28 (suma) reprezintă de 4 ori numărul mic (b).

$$28 : 4 = 7 \text{ (b)}$$

$$7 \times 3 = 21 \text{ (a)}$$

Verificare: $21 + 7 = 28$

Probleme propuse

- ❁ **1.** Suma a două numere este 27. Aflați numerele, știind că al doilea este de 2 ori mai mare decât primul.
- ❁ **2.** Suma a două numere este 35. Primul este de 4 ori mai mic decât al doilea. Aflați numerele.
- ❁ **3.** Doi frați au împreună 64 de nuci. Aflați câte nuci are fiecare, dacă unul din ei are de 7 ori mai multe nuci decât celălalt.
- ❁ **4.** În două zile un elev a citit 24 de pagini. Câte pagini a citit în fiecare zi, dacă în prima zi a citit de 3 ori mai mult decât a doua zi?
- ❁ **5.** Trei persoane cumpără 100 kg de varză. Primele două cumpără cantități egale, iar a treia cât celelalte două la un loc. Câte kilograme de varză a cumpărat fiecare persoană?
- ❁ **6.** Trei cărți au împreună 525 de pagini. Cea de-a treia are un număr dublu de pagini față de a doua, iar prima este jumătate din a doua. Câte pagini are fiecare carte?
- ❁ **7.** În trei saci sunt 120 kg de ciment. Câte kilograme de ciment sunt în fiecare sac, știind că în al doilea este jumătate din cantitatea din primul, iar în al treilea de 3 ori mai mult decât în al doilea?
- ❁ **8.** Suma a două numere este 136. Dacă pe primul îl înmulțim cu 2, iar pe al doilea cu 6, obținem numere egale. Aflați cele două numere.
- ❁ **9.** Suma a două numere este 48. Dacă pe primul îl mărim de 3 ori, iar pe al doilea de 9 ori, obținem numere egale. Aflați numerele.

❁ **10.** Împărțitul unui număr și dublul celui de-al doilea sunt numere egale și au suma 448. Aflați numerele.

❁ **11.** Triplul unui număr este egal cu dublul altui număr. Să se afle numerele, știind că suma celor două numere este 250.

❁ **12.** Suma a două numere este 80. Diferența lor este de 3 ori numărul mai mic. Care sunt numerele?

❁ **13.** Suma a două numere este 200. Dacă pe primul îl înmulțim cu 6, iar pe al doilea cu 2, obținem numere egale. Să se afle numerele.

❁ **5.** Pe un raft sunt de trei ori mai multe pâini față de altul, în total 40. Aflați câte pâini sunt pe fiecare raft.

❁ **6.** Într-un sac sunt de 5 ori mai multe kilograme de alimente decât în altul. Diferența dintre cantitățile din cei doi saci este de 40 kg. Care kilograme sunt în fiecare sac?

❁ **7.** Fie un număr de 6 ori mai mare decât un altul. Dacă se înmulțesc cu 2 și se adună rezultatele, se obține 18. Care este vârsta fiicării?

❁ **8.** Se dau 3 numere. Al doilea este de 2 ori mai mic decât primul, al treilea este suma celorlalte două. Suma celor trei și al doilea este 22. Să se afle numerele.

❁ **9.** Suma a două numere este 136. Dacă pe primul îl înmulțim cu 2, iar pe al doilea cu 6, obținem numere egale. Aflați cele două numere.

❁ **10.** O pâine și jumătate costă 6 de lei. Câte lei costă o pâine?

3. DIFERENȚĂ ȘI CÂT

În aceste probleme se precizează de câte ori este mai mare un număr „a” decât un număr „b” (sau de câte ori este mai mic „b” decât „a”) și care este diferența dintre ele.

Reprezentarea prin segmente sugerează că, dacă „a” este de „n” ori mai mare ca „b”, atunci diferența „a - b” este $(n - 1)b$. Vom obține numărul „b” prin împărțirea diferenței la „n - 1” și apoi pe „a” prin înmulțirea lui „b” cu „n”.

Problemă rezolvată

☑ Diferența a două numere este 18, iar câtul lor este 3. Să se determine numerele.

Rezolvare

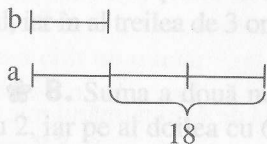
$$a - b = 18$$

$$a : b = 3 \text{ sau } a = 3b$$

$$a = ? \quad b = ?$$

Pentru a-mi ușura interpretarea datelor problemei și a vedea mai bine în minte figura, am rescris a doua relație prin operația inversă împărțirii:

• deîmpărțitul = câtul \times împărțitorul, în cazul nostru $a = 3 \times b$.



Din figură se observă că diferența (18) reprezintă de două ori „b”:

$$18 : 2 = 9 \text{ (b)}$$

$$9 \times 3 = 27 \text{ (a)}$$

Verificare: $27 - 9 = 18$

Probleme propuse

☼ 1. Câtul a două numere este 2, iar diferența lor este tot 2. Aflați numerele.

☼ 2. O compunere are de 4 ori mai multe rânduri decât alta. Să se afle câte rânduri are fiecare, știind că una are cu 27 rânduri mai mult decât cealaltă.

☼ 3. Diferența a două numere este 40, iar câtul este 5. Aflați numerele.

☼ 4. Un caiet are cu 150 de pagini mai mult decât altul. Aflați câte pagini are fiecare caiet, dacă unul e de 3 ori mai gros decât celălalt.

☼ 5. Pe un raft sunt de trei ori mai multe pâini decât pe altul, adică cu 40 mai multe. Aflați câte pâini sunt pe fiecare raft.

☼ 6. Într-un sac sunt de 5 ori mai multe kilograme de ciment decât în altul. Diferența dintre cantitățile din cei doi saci este de 60 kg. Câte kilograme sunt în total?

☼ 7. Fiul are de 6 ori mai puțini ani decât tatăl, adică cu 25 mai puțin. Care este vârsta fiecăruia?

☼ 8. Se dau 3 numere. Al doilea este de 2 ori mai mic decât primul, al treilea este suma celorlalte două, iar diferența dintre al treilea și al doilea este 22. Să se afle numerele.

☼ 9. Să se afle numărul \overline{abc} , știind că $b = c$, $b = 2a$ și $b + c - 2a = 8$.

☼ 10. O pâine și jumătate costă 6 de lei. Cât costă o pâine?

* 11. Două cutii au același număr de bomboane. După ce se iau din prima 85 de bomboane și din a doua 25, se constată că în a doua au rămas de 5 ori mai multe bomboane. Câte bomboane are fiecare cutie?

* 12. Andrei are a treia parte din vârsta bunicii și jumătate din vârsta mamei. Bunica este mai mare cu 44 de ani decât Andrei. Aflați vârstele celor trei persoane.

* 13. O carte are cu 384 de pagini mai mult decât alta, adică de 4 ori mai multe. Câte pagini are fiecare carte?

* 14. La un concurs de atletism numărul copiilor de peste 10 ani a fost de 7 ori mai mare decât cel al copiilor care aveau mai puțin de 10 ani. Să se afle numărul copiilor din fiecare categorie de vârstă, știind că cei de peste 10 ani erau cu 144 mai mulți decât ceilalți.

* 15. Pentru 6 kg de cartofi s-au plătit cu 4 lei mai mult decât pentru 2 kg. Cât costă 1 kg de cartofi?

* 16. 7 caiete au cu 192 de file mai mult decât 3 caiete. Câte file are un caiet?

* 17. Diferența a două numere este 54, fiind de 3 ori mai mare decât primul număr. Aflați numerele.

* 18. Dacă 4 bomboane costă cu 4 500 de lei mai mult decât una singură, cât costă o bomboană?

4. ÎMPĂRȚIREA CU REST

În unele probleme se cunoaște suma sau diferența a două numere naturale, câtul împărțirii celui mai mare la cel mai mic și restul acestei împărțiri.

Astfel, dacă $a = b \times n + r$, atunci vom reprezenta „b” printr-un segment, iar pe „a” prin „n” segmente de mărimea celui care-l reprezintă pe „b” și încă un segment (mai mic) care să reprezinte restul.

Reprezentarea figurativă sugerează să scădem din sumă sau diferență pe „r” pentru a rămâne cu „n + 1” (sau „n - 1”) segmente de mărimea celui care-l reprezintă pe „b”.

Probleme rezolvate

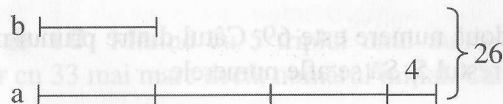
☑ 1. Suma a două numere este 26. Câtul împărțirii numărului mai mare la cel mic este 3, iar restul 2. Care sunt cele două numere?

Rezolvare

$$a + b = 26$$

$$a : b = 3 \text{ (rest 2) sau } a = 3b + 2$$

$$a = ? \quad b = ?$$



Din figură observăm că dacă din suma 26 îl îndepărtăm (scădem) pe 2, obținem de 4 ori „b”.

$$26 - 2 = 24 \text{ (4b)}$$

De aici avem o problemă în care cunoaștem suma și câtul.

$$24 : 4 = 6 \text{ (b)}$$

$$6 \times 3 + 2 = 20 \text{ (a)}$$

Verificare: $20 : 6 = 3 \text{ (rest 2) sau } 20 + 6 = 26$